ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Σεπτέμβριος 2014

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2.5 μονάδες το καθένα). **Καλή Επιτυχία.**

Θέμα 1 : Να βρεθεί η συνάρτηση f όταν είναι γνωστό ότι είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού με συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου 1 και δίνεται από τον παρακάτω πίνακα τιμών

x_i	-1	0	2
f_i	3	1	3

χρησιμοποιώντας μόνο παρεμβολή.

Θέμα 2 : Δοθέντος ότι η συνάρτηση f, που δίνεται από τον πίνακα τιμών:

x_i	-1	0	1	2	3
f_i	0	0	1	5	14

είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, να βρεθούν οι ακριβείς τιμές των ολοκληρωμάτων: $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ και $\int_1^2 f(x)dx$, χρησιμοποιώντας κατάλληλους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης, χωρίς να βρεθεί η f.

Θέμα 3 : Δίνεται η εξίσωση $f(x) = x^3 - 2x - 1 = 0$. Να αποδείξετε ότι αυτή έχει μια μοναδική και απλή ρίζα ξ στο διάστημα $I = [1,2]$. Για την εύρεση της ρίζας αυτής προτείνεται ο αλγόριθμος

$$x_{n+1} = x_n - 0.1(x_n^3 - 2x_n - 1), n = 0, 1, 2, \ldots$$

Να αποδείξετε Ο αλγόριθμος αυτός πληρεί το κριτήριο σύγκλισης στο διάστημα $I = [0, 1]$.

Θέμα 4 : Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss με φυσική οδήγηση.

ΘΕΜΑ 2ο:

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ

Δοθέντος στη συνάρτηση f, που δίνεται από τον πίνακα τιμών:

x_i	-1	0	1	2	3
f_i	0	0	1	5	14

είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού
Να βρεθούν οι ακριβείς τιμές των ολοκληρωμάτων
$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ και $\int_{1}^{2} f(x)\,dx$ χρησιμοποιώντας τους κατάλληλους αριθμητικούς τύπους ολοκλήρωσης

ΛΥΣΗ.

$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$: Χρησιμοποιούμε Simpson με βήμα $h=2$

$$Q_3^{SIN}(f) = \frac{2}{3}\cdot\left(\cancel{f(-1)}^{0} + 4f(1) + f(3)\right) = \frac{2}{3}\cdot(4+14) = 12.$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^{-1} f(x)\,dx - \int_2^{-1} f(x)\,dx =$$

$$= -\int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \overset{(h=1)}{=} -Q_3^{SIN}(f) + Q_4^{3/8}(f) =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\left(f(-1)+4f(0)+f(1)\right) + \frac{3}{8}\left(f(-1)+3f(0)+3f(1)+f(2)\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{3}{8}\cdot(3+5) = -\frac{1}{3}+3 = \frac{8}{3}.$$

ΘΕΜΑ 3ο

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ

Δίνεται η εξίσωση $f(x)=x^3-2x-1=0$

ΝΔΟ αυτή έχει μοναδική και απλή ρίζα ξ στο $\Delta[1,2]$

Για την εύρεση αυτής να γίνει η χρήση του αλγορίθμου

$$x_{n+1}=x_n-0.1\left(x_n^3-2x_n-1\right),\quad n=0,1,2\ldots$$

ΝΔΟ ο αλγόριθμος πληρεί το κριτήριο σύγκλισης στο $\Delta[1,2]$. (ή στο $\Delta[0,1]$) ← όμοια με το $[1,2]$.

ΛΥΣΗ

- $\begin{cases} f(1)=-2<0 \\ f(2)=3>0 \end{cases}$
- $f\in C([1,2])$

$\xrightarrow{\text{Θετ}}$ $\exists\, \xi\in(1,2):\ f(\xi)=0$

- $f'(x)=3x^2-2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Αφού, $x\notin[1,2]$ τότε η $f\uparrow$ διότι εντός των ριζών παίρνει θετικό πρόσημο.

Επομένως, $\exists$ ακριβώς ένα $\xi\in(1,2):\ f(\xi)=0$.

Έπειτα, θεωρούμε $\varphi(x)=x-0.1(x^3-2x-1),\ \forall x\in[1,2]$

$$\varphi'(x)=1-0.1(3x^2-2)=1-\frac{1}{10}(3x^2-2)=\frac{10-3x^2+2}{10}=$$

$$=\frac{-3x^2+12}{10}=0 \Rightarrow -x^2+4=0 \Rightarrow x=\pm 2$$

x	1		2
$\varphi'(x)$		+	
$\varphi(x)$		↗	

Η $\varphi\uparrow:[1,2]$

$\varphi([1,2])=[\varphi(1),\varphi(2)]=[1.2,\ 1.7]\subseteq[1,2]$

άρα $\varphi:[1,2]\to[1.2,1.7]\subseteq[1,2]$.

καλά ορισμένη.

$$\lambda=\max_{x\in[1,2]}|\varphi'(x)|=\max_{x\in[1,2]}\left|\frac{-3x^2+12}{10}\right|=\frac{1}{10}\max_{x\in[1,2]}|3x^2-12|=$$

$$=\frac{1}{10}(3\cdot 4-12)=0<1$$, άρα συνεπώς πληρεί το κριτήριο σύγκλισης στο $[1,2]$.